Recapitulare clasa a 7-a

Algebră

1. Fie numărul natural $a = 7^{2n} \cdot 576^{n+1} + 24^{2n} \cdot 49^{n+1}$, unde $n \in \mathbb{N}^*$. Arătați că numărul $\sqrt{a}$ este natural par, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}$.

2. Calculați: $\sqrt{\frac{102}{99} \cdot \left[\left(\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{50\cdot 51}\right) - \left(\frac{1}{51\cdot 52} + \frac{1}{52\cdot 53} + \frac{1}{53\cdot 54} + \cdots + \frac{1}{101\cdot 102}\right)\right]}$.

3. Arătați că numărul $A = \sqrt{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)+1}$ este număr rațional, oricare ar fi $x \in \mathbb{Q}$.

4. Calculați:

a) $\sqrt{6a^4 + \sqrt{6a^8 + \sqrt{5a^{16} + \sqrt{16a^{32}}}}} =$

b) $\left[1 + \left(-\sqrt{3}\right)^2\right] \cdot \left[\left(\sqrt{0,(3)}\right)^{-1} - \left(\sqrt{3}\right)^0\right] - \left(-\sqrt{3}\right)^2 =$

c) $\left(4\sqrt{27} - 5\sqrt{24} + 3\sqrt{48}\right) : \left(-\sqrt{3}\right) - \left(-12\sqrt{2} + 20\right) : \sqrt{2} =$

d) $\sqrt{2}\left(3\sqrt{5} - 6\sqrt{2} + 10\sqrt{3}\right) - \sqrt{3} \cdot \left(\sqrt{30} - \sqrt{48} + 10\sqrt{2}\right) =$

e) $-\sqrt{2} - \sqrt{(-2)^2} + \left|1 - \sqrt{2}\right| + 2\left|\sqrt{8} - 3\right| + \left|-\sqrt{2}\right|^2 - \left|-4\sqrt{2}\right| =$

f) $\sqrt{3} \cdot 16\sqrt{8} \cdot 2^{-3} : \left(2\sqrt{12}\right) + 5\sqrt{2} =$

g) $3\sqrt{3} \cdot \left(5\sqrt{6} + 4\sqrt{12}\right) - 2\sqrt{8}\left(3\sqrt{2} + 5\right) =$

h) $\frac{2\sqrt{5}\cdot 3\sqrt{2}}{4} \cdot 3^{-2} + \frac{5\sqrt{10}}{8} =$

i) $\frac{\sqrt{7}\cdot(2-\sqrt{3})}{4} - 1,(3) \cdot \sqrt{7} + \frac{\left(\sqrt{42} - 2\sqrt{24}\right)}{2} : \sqrt{2} =$

j) $\sqrt{2}\left\{\left[2\left(\sqrt{12} - \sqrt{18}\right) - 2\sqrt{2}\right] : 4 + \sqrt{27}\right\} - 4\sqrt{6} =$

k) $\sqrt{5}\left\{\left[\sqrt{15} \cdot \left(\sqrt{75} - \sqrt{45}\right) + 5\sqrt{7}\right] : 5\right\} + \sqrt{60} =$

l) $\left(\sqrt{48} - \sqrt{28}\right) \cdot \left(\sqrt{7} - \sqrt{27}\right) =$

m) $\left(\sqrt{108} - \sqrt{60} + \sqrt{24}\right) \cdot \left(\sqrt{54} + \sqrt{135}\right) =$

n) $0{,}3\sqrt{45} + \sqrt{1{,}25} - \left(3\sqrt{10}\right) : \left(-\sqrt{2}\right) =$

o) $\left(2\sqrt{3} \cdot \sqrt{7} - \sqrt{189}\right) : \left(5\sqrt{7} - \sqrt{112}\right) - \sqrt{27} =$

p) $\sqrt{(4\sqrt{2} - 6)^2} + \sqrt{8} - \sqrt{392} =$

5. Arătați că $a = \sqrt{2^{n+1} - \sqrt{2^{2n+1} - \sqrt{4^{2n}}}} \in \mathbb{N}$ oricare ar fi numărul natural n par.

6. Fie $x, y, z \in \mathbb{R}$ astfel încât $\sqrt{(x - 2\sqrt{5})^2} + \sqrt{(y - \sqrt{45})^2} + \sqrt{(z - 2\sqrt{80})}^2 \leq 0.$ Calculați $x + y + z, x^2 + y^2 + z^2$.

7. Să se arate că numărul: $a = \frac{3\sqrt{150}+\sqrt{96}-\sqrt{54}}{\sqrt{8}-(3\sqrt{32}-\sqrt{72})} : \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{-1}$ este un număr natural.

8. Calculați: $\left(\sqrt{\frac{0,2(4)}{1,(3)}} \cdot 0,25 - \frac{1}{3\sqrt{5}}\right)^3 \cdot \sqrt{\frac{1}{1,(6)}} =$.

9. Considerăm numărul $a = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}} + \cdots + \frac{\sqrt{100}-\sqrt{99}}{\sqrt{9900}}$.

i) Arătați că a este un număr rațional și apoi determinați inversul lui a.
ii) Determinați cel mai mic număr natural nenul n pentru care $\sqrt{n \cdot a}$ este un număr natural.

10. Aflați numărul x din proporția: $\frac{x}{\sqrt{1,(7)}-\sqrt{0,16}:\sqrt{0,(4)}-\sqrt{6\frac{1}{4}}} = \frac{10 \cdot \sqrt{\frac{1}{1,36(1)}}+\sqrt{0,25}}{x}$.

Geometrie

1. În triunghiul dreptunghic $ABC, m(\sphericalangle A) = 90°$, bisectoarea $(BE$ a unghiului $\sphericalangle ABC, E \in (AC)$, intersectează perpendiculara în C pe BC în punctul D. Fi $CD \cap AB = \{F\}$ și $DG \perp FB$, $G \in (FB)$. Demonstrați că:

a) triunghiul CED este isoscel;
b) $ECDG$ este romb.

2. Laturile DC și BC ale rombului $ABCD$ se prelungesc cu $DE \equiv DC$ și $BF \equiv BC$. Arătați că F, A, E sunt coliniare.

3. În dreptunghiul $ABCD$, punctele P, Q și R sunt mijloacele segmentelor AB, PC, respectiv PD. Demonstrați că $ABQR$ este trapez isoscel.

4. În triunghiul ABC isoscel $(AB = AC)$, BM și CN sunt mediane, $M \in AC, N \in AB$, iar $BM \cap CN = \{G\}$. Dacă P este mijlocul segmentului BG, demonstrați că $NP \perp BC$.

5. În trapezul isoscel $ABCD$, cu $AB \parallel CD$, avem $AD = CD = BC$ și $AB = 2DC$.

a) Determinați măsurile unghiurilor trapezului.
b) Demonstrați că $AC \perp BC$.

6. În triunghiul dreptunghic $ABC, \angle A = 90°$, se consideră înălțimea AD și mediana $AM, D, M \in BC$. Se construiește $BF \perp AM, F \in AM$.

a) Demonstrați că $ABDF$ este trapez isoscel.
b) Dacă $BF \cap AD = \{H\}$, demonstrați că $MH \parallel AC$.

7. În trapezul isoscel $ABCD, AB \parallel CD, \sphericalangle B = 60°, AD \equiv DC \equiv CB = 4cm$. Paralela prin C la AD intersectează AB în punctul E.

a) Demonstrați că triunghiul CEB este echilateral;
b) Calculați lungimea segmentului laturii AD;
c) Demonstrați că $AC \perp CB$.